Remarques sur une méthode de réalisation de bigèbres, et algèbres de Hopf associées à certaines réalisations

Eric Mourre

2003

Abstract

This article introduces a method, which starting from simple and quite general mathematical data, allows to construct linear algebras of operators which are, each of them, endowed with a bialgebra structure (coproduct and counity), (thm 2.1, 2.2, 2.3) . Moreover under some explicit and natural conditions on theses mathematical data we obtain linear algebras of operators with the following property: each of them, is either a Hopf algebra, or its bialgebra structure determines a more abstract Hopf algebra associated with it. Finally, we describe a more general abstract condition for theses bialgebras to admit a unique associated Hopf algebra.
The presentation is adapted to the cases where the algebras of linear operators are not finitely generated.
This article is restricted to the exposition of the method of construction and to the proofs of existence and uniqueness of the structures associated with each algebra of linear operators that are constructed.

Nevertheless, it may be noticed that the ideals of relations associated with bialgebras that are obtained determine an algebraic domain which is of theoretical interest .

—

L'objet de cet article est la présentation d'une méthode qui permet à partir de données simples de réaliser des familles d'algèbres

d'opérateurs linéaires qui sont munies d'une structure de bigèbre (théorèmes 2.1, 2.2, 2.3). On met en évidence des réalisations suffisamment générales d'algèbres d'opérateurs linéaires pour lesquelles la structure de bigèbre obtenue détermine un idéal minimal qui soit aussi un coidéal et tel que la bigèbre quotient soit une algèbre de Hopf (théorèmes 3.1, 3.2). Finalement le théorème (4.1), plus abstrait, donne pour une réalisation de bigèbre générale, une condition suffisante, pour que la bigèbre admette une algèbre de Hopf canoniquement associée. On se limite dans cet article à la description de la méthode et à la démonstration de l'existence et de l'unicité des structures construites sur chacune des algèbres d'opérateurs réalisées. Les bigèbres sont obtenues par l'action et en particulier la représentation de bigèbres libres sur des algèbres tensorielles ; l'algèbre image obtenue par une représentation n'est, en général, pas une bigèbre. Notons que les idéaux des relations, associés par la construction proposée sont alors des objets algébriques, théoriquement intéressants.

Mots clef: Réalisation de bigèbres, algèbres de hopf associées
Prétirage: CPT-2003/P.4544

Introduction.

L'étude des bigèbres et des algèbres de Hopf s'est développée dans le cadre des groupes classiques et plus récemment autour des exemples que constituent les groupes quantiques .
Les résultats présentés dans cet article concernent plutôt la théorie générale des bigèbres, parce que la construction présentée nous donne des algèbres d'opérateurs linéaires, explicites qui sont chacune munies d'une structure de bigèbre; la construction proposée présente en ce sens un intérêt théorique .

La présentation de la méthode est adaptée à la réalisation de bigèbres qui ne soient pas nécessairement finiment engendrées.

Dans le paragraphe (1), on introduit les définitions des différents types de cogèbres sur lesquelles repose la construction , ainsi que les opérateurs invariants à droite qui leurs sont attachés. On introduit aussi les bigèbres tensorielles contruites sur ces cogèbres, dont nous aurons besoin dans la suite .

Le paragraphe (2) expose la méthode de réalisation des bigèbres, basée sur le lemme 2.1 et le théorème 2.1; l'existence d'une structure effective de bigèbre est démontrée dans les théorèmes 2.2 et 2.3 . Ce dernier théorème donne des conditions suffisantes qui permettent d'obtenir des bigèbres dont l'idéal des relations est engendré par une réunion dénombrable d'espaces vectoriels (de relations), qui sont des coidéaux de dimensions finies .

Le paragraphe (3) décrit des conditions explicites sur les données initiales qui permettent de construire des algèbres d'opérateurs linéaires ayant chacune la propriété suivante : soit c'est une algèbre de Hopf, soit la structure de bigèbre dont elle est munie, détermine une algèbre de Hopf, plus abstraite, qui lui est associée .

Le paragraphe (4), pour des bigèbres obtenues essentiellement sous les hypothèses du théorème 2.3, met en évidence, dans un cadre plus général que celui du paragraphe (3) , l'hypothèse qui permet d'associer une algèbre de Hopf à certaines des bigèbres réalisées .

1 Quelques éléments nécessaires à la réalisation explicite de bigèbres .

Ce paragraphe présente les outils élémentaires qui permettent la construction explicite et simple de bigèbres .

En particulier les bigèbres libres, sont un réceptacle , et les bigèbres construites seront des sous algèbres de l'algèbre des opérateurs invariants à droite agissant sur une bigèbre libre. D'autre par la structure de cogèbre joue un rôle particulier dans la construction, ainsi que les structures duale et préduale, pour lesquelles on décrit quelques relations élémentaires .

On introduit ici les définitions essentielles que l'on utilisera .

Les algèbres que l'on considère sont des algèbres associatives sur C , avec unité. Les morphismes d'algèbres préserveront l'identité .

Définition 1.1 (Cogèbre .)

Une cogèbre est un espace vectoriel V *muni d'un coproduit* Δ *, et d'une counité* ϵ *, qui sont des applications linéaires :*

$$\Delta : V \to V \otimes V$$

$$\epsilon : V \to C.$$

Δ *est coassociatif:*

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta$$

comme applications linéaires de V *dans* $V \otimes V \otimes V$.

La counité vérifiant:

$$(\epsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta = id : V \to V \ .$$

Etant donnée une cogèbre : $V(\Delta, \epsilon)$ *, pour tout* $v \in V$ *on notera:*

$$\Delta(v) = \sum_k v_k^{'} \otimes v_k^{''} \ .$$

Définition 1.2 (Bigèbre .)

Une bigèbre $A(\Delta, \epsilon)$ *est une algèbre associative* A *, avec unité, et munie d'une structure de cogèbre telle que le coproduit et la counité soient des morphismes d'algèbres .*

Définition 1.3 (Algèbre de Hopf .)

Une algèbre de Hopf H *est une bigèbre* $H(\Delta, \epsilon)$ *munie d'une application linéaire* $S : H \to H$ *qui vérifie pour tout* h *dans* H *:*

$$\sum_k h_k^{'}.S(h_k^{''}) = \epsilon(h) u_H$$

et

$$\sum_k S(h_k^{'}).h_k^{''} = \epsilon(h) u_H$$

où u_H *est l'unité dans l'algèbre* H *et :*

$$\Delta(h) = \sum_k h_k^{'} \otimes h_k^{''} \ .$$

S est appelée l'antipode de l'algèbre de Hopf . Elle est unique, et est nécessairement un anti-homomorphisme d'algèbre et un anti-homomorphisme de cogèbre.

Une référence sur les structures d'algèbres associatives, de cogèbres, bigèbres, et d'algèbres de Hopf est [1]; pour les groupes quantiques, et l' étude de la structure d'algèbre de Hopf quasi-triangulaire mise en évidence dans [4], pour l'étude de nombreux exemples, ainsi que pour avoir des références plus complètes une référence est: [2].
Le lemme 2.1 a été publié antérieurement sous une forme différente [3]; mais nous montrons dans cet article comment l'on peut l'utiliser pour construire des structures algébriques particulières.

Signalons encore que les bigèbres obtenues ne sont pas nécessairement des algèbres finiment engendrées .

1.1 Bigèbre libre construite sur une cogèbre .

L'exemple typique et intéressant de cogèbres, utiles pour la construction de bigèbres présentée dans cette note, est celui des cogèbres de dimensions finies que nous présentons pour éclairer les notations, mais il ne sera pas nécessaire de s'y restreindre.
Soit E une algèbre associative sur C avec unité, et de dimension finie; soit F son dual ;
F est muni d'une structure de cogèbre. Le coproduit et la counité sont définis par:

$$\Delta : F \to F \otimes F \quad et \quad \epsilon : F \to C$$

$$\Delta f(e_1 \otimes e_2) = f(e_1.e_2) \quad \forall f \in F, \quad et \quad \forall e_1, e_2 \in E$$

$$\epsilon(f) = f(u_E) \quad \text{où} \quad u_E \ est \ \text{l'unité} \ dans \ E \ .$$

La coassociativité de Δ est assurée par l'associativité du produit dans E:

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta$$

et

$$(\epsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta = id : F \to F \ .$$

Pour toute base $(e^i)_{i\in I}$ de l'algèbre E en désignant par $(f_i)_{i\in I}$ la base canonique duale de la cogèbre F on a:

$$\Delta f_i = \sum_{l,m} e_i^{l,m} f_l \otimes f_m$$

où:

$$e^l.e^m = \sum_i e_i^{l,m} e^i$$

et de plus l'on a :

$$u_E = \sum_i \epsilon(f_i) e^i \ .$$

Dans ce qui suit nous ne supposerons plus que les cogèbres utilisées comme points de départ de la construction sont de dimensions finies.

Nous aurons besoin pour énoncer les propositions et les théorèmes par la suite , de définir différents types de cogèbres .

Définition 1.4 (Espace vectoriel à base dénombrable .) *C'est un espace vectoriel F qui est la somme directe d'une famille dénombrable d'espaces vectoriels de dimensions finies* $(F_\alpha)_{\alpha\in N}$ *.*

Définition 1.5 (Formes à support fini sur un espace à base dénombrable.) *Une forme* $\omega \in F^*$ *est à support fini si* $\omega(F_\alpha) = 0$ *sauf pour un nombre fini d'indices* α *.*

Définition 1.6 (Cogèbre de type fini .)
Une cogèbre de type fini F *est un espace vectoriel à base dénombrable muni d'un coproduit coassociatif, et d'une counité , telle que tout sous espace vectoriel de dimension finie de* F *soit contenu dans une sous cogèbre de dimension finie de* F *.*

Définition 1.7 (Cogèbre cofinie.) *Une cogèbre cofinie est un espace vectoriel à base dénombrable muni d'un coproduit coassociatif et d'une counité , telle que pour tout* $f \in F$
$\Delta(f) = \sum_k f_k^{'} \otimes f_k^{''}$ *n'invoque q'une sommation finie , de termes linéairement indépendants dans* $F \otimes F$ *.*

Définition 1.8 (Cogèbre régulière .) *Une cogèbre régulière est un espace vectoriel à base dénombrable muni d'un coproduit coassociatif et d'une counité qui vérifient,*
en notant pour tout $f \in F$

$$\Delta(f) = \sum_k f_k^{'} \otimes f_k^{''}$$

et en supposant que les vecteurs $f_k^{'} \otimes f_k^{''}$ *sont linéairement indépendants dans* $F \otimes F$ *:*
a) pour tout $f \in F$*, et tout sous espace vectoriel* $F_n \subset F$ *de dimension finie, l'ensemble des indices* k*, tels que* $0 \neq f_k^{'} \otimes f_k^{''} \in F_n \otimes F$ *ou* $F \otimes F_n$ *, est fini.*

b) pour tout sous espace vectoriel F_n *de dimension finie, l'ensemble des vecteurs* f *tels que* $\forall k$ *,* $C.f_k^{'} \otimes f_k^{''} \cap F_n \otimes F_n = 0$ *est un sous espace vectoriel de codimension finie .*
c) pour tout $f \in F$ *l'ensemble des indices* k *tels que* $\epsilon \otimes id(f_k^{'} \otimes f_k^{''})$ *ou* $id \otimes \epsilon(f_k^{'} \otimes f_k^{''})$ *soient non nuls, est un ensemble fini .*

Proposition 1.1 (Bigèbre libre construite sur une cogèbre F .)
Soit $F(\Delta, \epsilon)$ *une cogèbre régulière.*
Soit $T(F)$ *l'algèbre tensorielle construite sur l'espace vectoriel* F*;*

$$T(F) = C \oplus F \oplus F \otimes F \oplus \ldots \oplus \otimes^n F \oplus \ldots$$

Alors il existe un unique morphisme d'algèbres, coassociatif:

$$\Delta : T(F) \to T(F) \otimes T(F)$$

et une unique counité , qui soit un morphisme d'algèbres :

$$\epsilon : T(F) \to C$$

qui vérifient sur $C \oplus F \subset T(F)$ *:*

$$1 \in C; \ \ \Delta(1) = 1 \otimes 1, \ \ \epsilon(1) = 1$$

$\forall f \in F, \Delta(f)$ *et* $\epsilon(f)$ *coïncident avec le coproduit et la counité de la cogèbre* F *.*

Démonstration:

Puisque $T(F)$ est l'algèbre associative libre construite sur F il n'y a pas d'obstructions à étendre par morphismes d'algèbres associatives les applications linéaires Δ et ϵ définies de F dans $T(F) \otimes T(F)$ ou C; de plus les relations associées à l'identification de $1 \in C$ à l'unité de $T(F)$ sont compatibles avec Δ et ϵ .Finalement l'on a :

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta$$

et

$$(\epsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta = id : T(F) \to T(F)$$

parce qu'elles correspondent à des identités entre morphismes d'algèbres qui coïncident sur les générateurs. Ainsi l'image par le coproduit s'explicite:

$$\Delta(f_1 \otimes f_2 \otimes \ldots \otimes f_n) = \sum_{k1,k2,\ldots,kn} (f'_{k1} \otimes f'_{k2} \otimes .. \otimes f'_{kn}) \otimes (f''_{k1} \otimes f''_{k2} \otimes .. \otimes f''_{kn})$$

où

$$\Delta(f_i) = \sum_{ki} f^{'}_{ki} \otimes f^{''}_{ki}.$$

On remarque que la bigèbre tensorielle construite sur une cogèbre régulière est encore une cogèbre régulière ; elle est de plus la somme directe des sous cogèbres $\otimes^n F$, $n \geq 0$.

Remarque 1.1 *Lorsque F est la cogèbre duale d'une algèbre E de dimension finie, le coproduit*

$$\Delta : F \otimes F \otimes \ldots \otimes F \to (F \otimes F \otimes \ldots \otimes F) \otimes (F \otimes F \otimes \ldots \otimes F)$$

correspond au coproduit de la cogèbre duale de l'algèbre

$$E \otimes E \otimes \ldots \otimes E$$

munie du produit ordinaire défini sur un produit tensoriel d'algèbres .On a donc la proposition suivante .

Proposition 1.2 *Soit E une algèbre associative avec unité, de dimension finie et F la cogèbre duale : $F = E^*$. La structure de cogèbre de $T(F)$ définie par sa structure de bigèbre correspond à celle d'une sous-cogèbre du dual de l'algèbre $A(E)$, produit directe des algèbres $\otimes^n E$:*

$$A(E) = \prod_{n \in N} \otimes^n E \ .$$

Remarquons simplement que pour tout n le sous espace $T_n(F)$ suivant est une sous cogèbre de $T(F)$:

$$T_n(F) = C \oplus F \oplus \ldots \oplus \otimes^n F$$

et que l'algèbre duale est $A^n(E)$:

$$A^n(E) = C \oplus E \oplus \ldots \oplus \otimes^n E$$

son unité étant: $1_C + u_E + u_E \otimes u_E + \ldots + \otimes^n u_E$.

1.2 Algèbre des opérateurs invariants à droite sur une cogèbre .

Définition 1.9 *Soit F une cogèbre munie du coproduit Δ et de la counité ϵ; un opérateur linéaire*

$$X : F \to F$$

est dit invariant à droite s' il vérifie:

$$\Delta \circ X = (X \otimes id) \circ \Delta \ .$$

Ils déterminent la sous algèbre des opérateurs invariants à droite :

$$Inv_d(F, F) \subset Hom(F, F) \ .$$

Proposition 1.3 *Soit F une cogèbre cofinie ; alors l' ensemble des opérateurs invariants à droite $Inv_d(F, F)$, est une sous algèbre de l'algèbre $Hom(F, F)$ des opérateurs linéaires sur F, qui est anti-isomorphe en tant qu' algèbre au dual F^* de la cogèbre coassociative F. La bijection est donnée par:*

$$i : X \in Inv_d(F, F) \to i(X) = \epsilon \circ X \in F^*,$$

l'application réciproque par:

$$i^{-1} : \omega \in F^* \to (\omega \otimes id) \circ \Delta \ \in Inv_d(F,F) \quad .$$

Et la forme bilinéaire entre une cogèbre $F(\Delta, \epsilon)$ et l'espace $Inv_d(F,F)$ des opérateurs invariants à droite est donnée par :

$$< X, f >= \epsilon \circ X(f).$$

On remarque que dans le cas d'une cogèbre cofinie, l'identication des opérateurs invariants à droite avec l'algèbre (opposée) de F^* ne nécessite pas de précautions sur le choix des formes dans F^* ; ce n'est déja plus le cas pour les cogèbres régulières, où dans cette note on se restreindra à un type de formes trés particulier .

Proposition 1.4 *Soit une cogèbre régulière $F(\Delta, \epsilon)$; c'est en particulier un espace vectoriel à base dénombrable .*
Alors l'espace vectoriel des formes à support fini est muni d'une structure d'algèbre associative anti-isomorphe à l'algèbre des opérateurs invariants à droite qu'elles définissent :$Inv_{d,f}(F,F)$. Pour tout forme ω à support fini on a:

$$X_\omega(f) = \omega \otimes id(\Delta(f)$$

et

$$\omega(f) = \epsilon \circ X_\omega(f).$$

Définition 1.10 (Formes régulières. Opérateurs invariants à droite réguliers.) *Les opérateurs invariants à droite obtenus à partir de formes à support fini, et l'opérateur identité, sur une cogèbre régulière F seront dans la suite désignés sous le terme d'opérateurs invariants à droite réguliers; l'algèbre sera désignée par : $Inv_{d,r}(F,F)$.*

Proposition 1.5 (Groupe des éléments inversibles dans $Inv_{d,r}(F,F)$.)
Soit $F(\Delta, \epsilon)$ une cogèbre régulière et soit B une sous algèbre de l'algèbre des formes à support fini sur F;
supposont B de dimension finie et avec unité : ϵ_B .

Si $u \in B$ admet u^{-1} pour inverse dans B ,
alors $u + (\epsilon - \epsilon_B)$ est inversible dans l'algèbre des formes régulières et son inverse est :
$u^{-1} + (\epsilon - \epsilon_B)$.
L'ensemble des éléments inversibles obtenus de cette manière dans $Inv_{d,r}(F, F)$ engendre un groupe.

Dans la section 3 on aura besoin d'utiliser les propriétés associées à des cogèbres plus courantes .

Définition 1.11 (Cogèbre fortement régulière.) *C'est une cogèbre régulière F qui vérifie la propriété suivante:*
pour tout sous espace vectoriel Ω de dimension finie de formes $\in F^*$, à support fini, il existe un coidéal $J \subset F$, de codimension finie, tel que

$$\Omega(J) = 0$$

Proposition 1.6 *Soit F une cogèbre fortement régulière et $X \subset Inv_{d,r}(F, F)$, un sous espace vectoriel de dimension fini d'opérateurs invariants à droite réguliers agissant sur F, alors l'algèbre engendrée par X est de dimension finie .*

Le problème de la recherche d'une notion de formes plus générale sur une cogèbre régulière, ou fortement régulière, et adaptée au contexte de cette note n'est pas abordé.

Définition 1.12 *Soit E une algèbre, son dual E^* n'admet pas, en général, une structure de cogèbre mais on peut définir la notion de sous cogèbre de E^*: c'est une cogèbre $F(\Delta, \epsilon)$ qui vérifie:*

$$F(\Delta, \epsilon) \subset E^*,$$

$$\forall f \in F, \;\; f(e_1.e_2) = \Delta(f)(e_1 \otimes e_2)) \;\; ,$$

$$\epsilon(f) = f(u_E) \;\; .$$

Alors on a:

Proposition 1.7 *Soient E une algèbre et $F(\Delta, \epsilon)$ une sous cogèbre de E^* ; pour tout $e \in E$ la transposition $e.^t$ de l'opérateur multiplication à gauche, $e. : E \to E$, est bien définie comme opérateur de $F \to F$, et c'est un opérateur invariant à droite de $F \to F$ et l'on a :*

$$i(e.^t)(f) = f(e).$$

2 Réalisation explicite de bigèbres .

Le lemme suivant donne un procédé pour construire des familles $(X_i)_i$ d'opérateurs linéaires d'une algèbre tensorielle $T(V)$ dans une algèbre associative B, qui ont la propriété suivante :

pour tout idéal $I(R)$ de $T(V)$ engendré par un ensemble d'éléments $R \subset T(V)$ alors :

$$X_i(R) = 0 \in B, \ \forall i \ \Rightarrow X_i(I(R)) = 0 \in B, \ \forall i.$$

Lemme 2.1 *Soit V un espace vectoriel (somme directe d'une famille dénombrable d'espaces vectoriels de dimensions finies) , $T(V)$ l'algèbre tensorielle associée, et B une algèbre associative avec unité 1_B.*
Soit L une cogèbre cofinie, de coproduit Δ , de counité ϵ , et x une application linéaire de L dans $Hom(V, B)$, l'espace des applications linéaires de V dans B :

$$x : L \to Hom(V, B)$$

alors il existe une unique application linéaire :

$$X : L \to Hom(T(V), B)$$

qui vérifie:

1) pour $1 \in T(V)$, $X(l)(1) = \epsilon(l)1_B$

2) pour $v \in V \subset T(V)$, $X(l)(v) = x(l)(v)$

3) pour tout couple w_1, w_2 d'éléments dans $T(V)$:

$$X(l)(w_1 \cdot w_2) = \sum_k X(l_k^{'})(w_1)._B X(l_k^{''})(w_2)$$

où :

$$\Delta(l) = \sum_k l_k^{'} \otimes l_k^{''} \ .$$

Démonstration:

Si L n'est pas de dimension finie il est naturel de supposer que pour tout $l \in L$, $\Delta(l) = \sum_k l_k^{'} \otimes l_k^{''}$, n'invoque qu'une sommation finie de termes linéairement indépendants dans $L \otimes L$.

Notons par $\Delta^{(n)} : L \to \otimes^{n+1} L$, l' application linéaire obtenue par:

$$\otimes^{n-1}(id) \otimes \Delta \circ \otimes^{n-2}(id) \otimes \Delta \circ \ldots \circ \Delta.$$

Alors $\otimes^{n+1}(x) \circ \Delta^{(n)}$ est une application linéaire de L dans $Hom(\otimes^{n+1}V \to \otimes^{n+1}B)$; finalement en composant avec le produit ordonné : $\otimes^{n+1}B \to B$, pour chaque l , on obtient un opérateur noté $X_{n+1}(l)$, dans $Hom(\otimes^{n+1}V, B)$, et par linéarité on définit l'opérateur :

$$X(l) : V \oplus V \otimes V \oplus \ldots \oplus \otimes^n V \oplus \ldots \to B.$$

Ils vérifient pour $w_1 \in \otimes^p V$ et, $w_2 \in \otimes^q V$, $w_1 \cdot w_2 \in \otimes^{p+q} V$:

$$X(l)(w_1 \cdot w_2) = \sum_k X(l_k^{'})(w_1).X(l_k^{''})(w_2) \quad .$$

Cette propriété est la conséquence de la coassociativité du coproduit sur L .

De plus on la préserve sur $T(L)$ en imposant sur C : $X(l)(1) = \epsilon(l).1_B$.

Théorème 2.1 *Soit $L(\Delta_L, \epsilon_L)$ une cogèbre cofinie, $F(\Delta_F, \epsilon_F)$ une cogèbre régulière, et x une application linéaire de la cogèbre L dans l'algèbre des opérateurs invariants à droite agissant sur la cogèbre F . On considère F comme étant inclus dans l'algèbre associative avec unité $T(F)$.*

$$x : L \to Inv_d(F, F)$$

définit une application linéaire de L dans $Hom(F, T(F))$, et le lemme 2.1 définit donc pour chaque $l \in L$ un opérateur $X(l)$:

$$X(l) : T(F) \to T(F) \ .$$

Ils vérifient :

1) $X(l)(1_{T(F)}) = \epsilon_L(l).1_{T(F)}$ *;*

2) $X(l)(f) = x(l)(f) \ \ \forall f \in F$ *;*

3) Pour tout $w_1, w_2 \quad \in T(F)$

$$X(l)(w_1 \cdot w_2) = \sum_k X(l_k^{'})(w_1) \cdot X(l_k^{''})(w_2)$$

où $\Delta_L(l) = \sum_k l_k^{'} \otimes l_k^{''}$ *;*

4) Pour tout $n \geq 0, \quad X(l) : \otimes^n F \to \otimes^n F$ *;*

5) Les opérateurs $X(l)$ *sont des opérateurs invariants à droite sur la bigèbre libre* $T(F)$ *.*

Démonstration:

Les propriétés 1,2,3 proviennent du lemme 2.1 et la propriété 4 est une conséquence du fait que : $x(l) : F \to F$ transforme simplement F dans F et des propriétés 1 et 3 . Démontrons la propriété 5 :

Soit la bigèbre libre $T(F)$, notons par Δ_F et ϵ_F son coproduit et sa counité, qui sont des morphismes d'algèbres respectivement de
$T(F) \to T(F) \otimes T(F)$ et de $T(F) \to C$; notons encore par Δ_L le coproduit sur la cogèbre L et ϵ_L la counité; soit :

$$Y(l) = \Delta_F \circ X(l) \ \ , \ \ Z(l) = (X(l) \otimes id) \circ \Delta_F \ .$$

Ce sont des opérateurs de $T(F)$ dans $T(F) \otimes T(F)$ qui vérifient:

$$Y(l)(1_{T(F)}) = \epsilon_L(l).1_{T(F)} \otimes 1_{T(F)} = Z(l)(1_{T(F)}) \ ;$$

par hypothèse les opérateurs $x(l)$ sont des opérateurs invariants à droite sur F

et donc :

$$\forall f \in F, \ \ Y(l)(f) = Z(l)(f) \ .$$

D' autre part pour tout $w_1, w_2 \in T(F)$ on a :

$$Y(l)(w_1 \cdot w_2) = \sum_k Y(l_k^{'})(w_1) \cdot_{T(F)\otimes T(F)} Y(l_k^{''})(w_2)$$

les opérateurs $Z(l)$ vérifient aussi:

$$Z(l)(w_1 \cdot w_2) = \sum_k Z(l_k^{'})(w_1) \cdot_{T(F)\otimes T(F)} Z(l_k^{''})(w_2)$$

où :

$$\sum_k l_k^{'} \otimes l_k^{''} = \Delta_L(l) \ .$$

Les opérateurs $X(l)$ sont donc bien des opérateurs invariants à droite sur la bigèbre $T(F)(\Delta_F, \epsilon_F)$, parce que les opérateurs $Y(l)$ et $Z(l)$ coïncident .

Il est important pour avoir un coproduit sur la sous algèbre engendrée par l'opérateur identité et la famille d' opérateurs $(X(l))_{l\in L} \ \subset Hom(T(F), T(F))$, que ces opérateurs soient des opérateurs invariants à droite sur la bigèbre $T(F)(\Delta_F, \epsilon_F)$ .Ceci est démontré dans le théorème suivant sous une condition plus restrictive: $x(L) \subset Inv_{d,r}(F, F)$.

Théorème 2.2 *Soit L et F deux cogèbres vérifiant :*
a) L est une cogèbre cofinie ;
b) F est une cogèbre régulière ;

Soit $x : L \to Inv_{d,r}(F, F)$ une application linéaire de la cogèbre L dans les opérateurs invariants à droite réguliers agissant sur la cogèbre F et soit :

$$X(l) \in Inv_d(T(F), T(F) \subset Hom(T(F), T(F))$$

les opérateurs donnés par le théorème 2.1

Alors l'algèbre U_x, engendrée par les opérateurs $X(l)$, $l \in L$ et l'identité est munie d'une unique structure de bigèbre $U_x(\Delta_L, \epsilon_L)$ telle que :

$\Delta_L : U_x \to U_x \otimes U_x$ étend par morphisme d'algèbres le coproduit défini sur les générateurs par :

$$\Delta_L : X(l) \to \sum_k X(l_k^{'}) \otimes X(l_k^{''})$$

$$\Delta_L : 1_{U_x} \to 1_{U_x} \otimes 1_{U_x}$$

où

$$\sum_k l_k^{'} \otimes l_k^{''} = \Delta_L(l)$$

et la counité $\epsilon_L : U_x \to C$ étend par morphisme d'algèbres la counité définie sur les générateurs par:

$$\epsilon_L(1_{U_x}) = 1,\ \epsilon_L(X(l)) = \epsilon_L(l).$$

Démonstration:

pour un monôme formé avec les générateurs de U_x nous avons, pour tout couple $w_1, w_2 \in T(F)$:

$$X(l_1) \circ X(l_2) \circ \ldots \circ X(l_n)(w_1 \cdot w_2)$$

est égal à :

$$\sum_{k1,k2,..,kn} X(l_{k1}^{'}) \circ X(l_{k2}^{'}) \circ \ldots \circ X(l_{kn}^{'})(w_1) \cdot X(l_{k1}^{''}) \circ X(l_{k2}^{''}) \circ \ldots \circ X(l_{kn}^{''})(w_2)\ .$$

Ainsi à tout polynôme Z formé sur les générateurs 1 et $X(l))$ on associe par linéarité un élément de $U_x \otimes U_x$ qui satisfait la propriété précédente; le point est qu'en général ceci ne définit pas une application de $U_x \to U_x \otimes U_x$, puisque un même opérateur est représenté par des polynômes différents ; démontrons dans notre cas que l'on a bien une application de $U_x \to U_x \otimes U_x$ qui sera alors clairement un morphisme d'algèbres. Supposons $Z(w) = 0$, $\forall \ \ w \in T(F))$; Soit un élément $\sum_k Z_k^{'} \otimes Z_k^{''} \in U_x \otimes U_x$ tel que :

$$Z(w_1 \cdot w_2) = \sum_k Z_k^{'}(w_1) \cdot Z_k^{''}(w_2), \quad \forall w_1, w_2 \in T(F).$$

Montrons que pour tout élément $w_1 \otimes w_2 \in T(F) \otimes T(F)$

$$\sum_k Z_k^{'}(w_1) \otimes Z_k^{''}(w_2) = 0 \quad dans \ \ T(F) \otimes T(F).$$

F étant une cogèbre régulière $T(F)$ est une bigèbre (régulière) et nous avons:

$$\forall w \in T(F), w = (\epsilon \otimes id)\Delta(w)$$

Les opérateurs $Z_k^{'}$ et $Z_k^{''}$ étant des opérateurs invariants à droite réguliers sur $T(F)$ il s'en déduit que:

$$\sum_k Z_k^{'}(w_1) \otimes Z_k^{''}(w_2)$$

est donné par

$$\sum_k (\epsilon \circ Z_k^{'} \otimes id)\Delta(w_1) \otimes (\epsilon \circ Z_k^{''} \otimes id)\Delta(w_2).$$

D'autre part notons:

$$\Delta(w_1) = \sum_i w_{1,i}^{'} \otimes w_{1,i}^{''}$$

$$\Delta(w_2) = \sum_j w_{2,j}^{'} \otimes w_{2,j}^{''}$$

et on obtient :

$$\sum_{k,i,j} \epsilon \circ Z_k^{'}(w_{1,i}^{'}).w_{1,i}^{''} \otimes \epsilon \circ Z_k^{''}(w_{2,j}^{'}).w_{2,j}^{''}$$

où les sommations sur les indices i, j s'effectuent sur un nombre fini de termes non nuls. En effectuant d'abord la sommation en k et parce que ϵ est un morphisme $T(F) \to C$ on obtient 0 comme conséquence de l'hypothèse $Z : T(F) \to T(F) = 0$; en effet les sommes suivantes:

$$\sum_k \epsilon \circ Z_k^{'}(w_{1,i}^{'}).\epsilon \circ Z_k^{''}(w_{2,j}^{'})$$

s'écrivent: $\sum_k \epsilon(Z_k^{'}(w_{1,i}^{'}).Z_k^{''}(w_{2,j}^{'})) = \epsilon \circ Z(w_{1,i}^{'}.w_{2,j}^{'}) = 0.$

Ainsi Δ_L est bien défini et c'est clairement un morphisme d'algèbres ;

Pour ce qui concerne la counité , on remarque que les opérateurs de l'algèbre U_x laissent invariant le sous espace $C \subset T(F)$; et en définissant pour $u \in U_x$

$$\epsilon_L(u).1 = u(1)$$

on obtient un morphisme $U_x \to C$ qui satisfait les conditions sur les générateurs $X(l), l \in L$ et 1 . Les autres propriétés de la structure de bigèbre en découlent.

Le théorème suivant donne les conditions qui permettent d'obtenir une information plus précise sur l'idéal des relations des bigèbres obtenues dans le théorème 2.2 .

Théorème 2.3 *Soit L et F deux cogèbres vérifiant :*
a) L est une cogèbre de type fini.
b) F est une cogèbre fortement régulière.

Soit $x : L \to Inv_{d,r}(F,F)$ une application linéaire de la cogèbre L dans les opérateurs invariants à droite réguliers sur la cogèbre F .

Soit $U_x(\Delta_L, \epsilon_L)$ la bigèbre donnée par le théorème 2.2 engendrée par l'identité de $T(F)$ dans $T(F)$ et les opérateurs $X(l)$:

$$X(l) \in Inv_d(T(F), T(F) \subset Hom(T(F), T(F)) \ .$$

Alors:
soit le morphisme d'algèbres , $\pi : T(L) \to U_x$ défini sur les monômes par :

$$\pi(l_{i1}^{j1} \otimes \ldots \otimes l_{in}^{jn}) = X(l_{i1}^{j1}) \circ \ldots \circ X(l_{in}^{jn}) \ ;$$

il définit une action et en particulier une représentation de $T(L)(\Delta_L, \epsilon_L)$ sur $T(F)$.

L'idéal des relations $I_x = ker\pi \subset T(L)$ est engendré par une réunion dénombrable $(R_\alpha)_{\alpha \in N}$ d'espaces vectoriels de dimensions finies qui sont chacun des coidéaux de la bigèbre $T(L)(\Delta_L; \epsilon_L)$.

La démonstration repose sur les hypothèses , que L soit une cogèbre de type fini, et que F soit une cogèbre fortement régulière ; ceci ayant en particulier pour conséquence (proposition 1.6) que les opérateurs $X(L_n) \subset Inv_{d,r}(F,F)$ engendrent une algèbre de dimension finie, lorsque L_n est un sous espace vectoriel de dimension finie de la cogèbre L .

3 Réalisation de bigèbres présentant une algèbre de Hopf associée .

Soit l'algèbre K^+ des matrices infinies vivant dans le demi-secteur supérieur. Une matrice (m_i^j) est dans K^+ si $m_i^j = 0$ lorsque j est strictement supérieur à i. Soit L^+ la cogèbre duale; une base est formée par les éléments de la suite

l_i^j avec $i, j \in N$ et $j \leq i$; le coproduit et la co-unité sont définis par :

$$\Delta(l_i^j) = \sum_{k \in (j,i)} l_k^j \otimes l_i^k$$

$$\epsilon(l_i^j) = \delta(j, i)$$

Soit d'autre part les cogèbres :

$$L_n^+ \quad \text{définies} \quad \text{pour} \quad \text{tout} \ n \in \ N$$

comme étant les cogèbres duales des algèbres M_n^+ de matrices trigonales supérieures.

Définition 3.1 *On dira qu'une cogèbre L est cotrigonale si c'est une somme directe de cogèbres définies ci-dessus. De plus on désignera par D_L l'ensemble obtenu par la réunion des éléments l_i^i diagonaux de chaque cogèbres intervenant dans la somme directe.*

On a pour tout :

$$l \in D_L : \quad \epsilon(l) = 1 \quad et \quad \Delta(l) = l \otimes l$$

Théorème 3.1 *Soit F une cogèbre fortement régulière et L une cogèbre cotrigonale;*
soit $x : L \to Inv_{d,r}(F, F)$ une application linéaire de L dans l'algèbre des opérateurs invariants à droite réguliers, vérifiant:

a)pour tout $l \in D_L$, $x(l)$ est un opérateur inversible dans $Inv_{d,r}(F, F)$

b) pour tout $l \in D_L$ il existe $l' \in D_L$ tel que

$$x(l) \circ x(l') = id : F \to F.$$

Alors :

A) Soit la bigèbre $U_x(\Delta_L, \epsilon_L) \quad \subset \quad Inv_d(T(F), T(F))$, engendrée par les opérateurs $X(l)$ et l'identité :

il existe une solution unique dans l'algèbre U_x , Y_i^j, $\;j \leq i$ au système d'équations :

$$\sum_k X(l_k^j) \circ Y_i^k = \epsilon_L(X(l_i^j)).1_{U_x} = \delta(i,j).1_{U_x}$$

et

$$\sum_k Y_k^j \circ X(l_i^k) = \epsilon_L(X(l_i^j)).1_{U_x} = \delta(i,j).1_{U_x} \ .$$

De plus chaque

$$Y_i^j$$

est donné par un polynôme explicite et fini dans les générateurs $X(l_l^m)$.

B) Soit le morphisme d'algèbres , $\pi : T(L) \to U_x$ défini par :

$$\pi(l_{i1}^{j1} \otimes \ldots \otimes l_{in}^{jn}) = X(l_{i1}^{j1}) \circ \ldots \circ X(l_{in}^{jn}) \ ;$$

il définit une action et en particulier une représentation de $T(L)$ sur $T(F)$. L'idéal des relations $I_x \subset T(L)$ est engendré par une réunion dénombrable R d'espaces vectoriels de dimensions finies qui sont chacun des coidéaux de la bigèbre $T(L)(\Delta_L;\epsilon_L)$.

C) La condition nécessaire et suffisante pour que l'antipode existe sur la bigèbre $U_x(\Delta_L, \epsilon_L)$ est que l'idéal bilatère I_x des relations soit engendré par un ensemble R de relations qui soit stable par l'anti-homomorphisme alors défini $S : T(L) \to T(L)$, vérifiant $\pi \circ S(l_i^j) = Y_i^j$.

Démonstration:

On se restreint au cas où la cogèbre cotrigonale L se réduit à la cogèbre L^+ .

Soit la matrice M_x à coefficients dans $Inv_d(T(F), T(F))$ définie par:

$$m_i^j = X(l_i^j) \quad j \leq i;$$

il est facile de vérifier que cette matrice est inversible, et qu' en particulier les coefficients $Y_i^j \in Inv_d(T(F), T(F))$ de la matrice inverse s'obtiennent comme polynômes finis explicites dans les opérateurs $X(l_l^m)$ pour $j \leq i$ .Ceci repose sur les faits que les opérateurs sur la diagonale $X(l_i^i)$ sont tous inversibles et que la matrice (X_i^j) est de structure triangulaire .

Donc nous obtenons l'unique solution (dans $U_x(\Delta_L, \epsilon_L)$) au problème suivant :

$$\sum_k X(l_k^j) \circ Y_i^k = \epsilon_L(X(l_i^j)).1_{U_x} = \delta(i,j).1_{U_x}$$

et

$$\sum_k Y_k^j \circ X(l_i^k) = \epsilon_L(X(l_i^j)).1_{U_x} = \delta(i,j).1_{U_x}$$

ce qui définit l'application $S_1(X(l_i^j) = Y_i^j$.

L'idéal des relations de la bigèbre $U_x(\Delta_L; \epsilon_L)$, se décrit de la manière suivante:
l'application linéaire $\pi : T(L) \to Inv_d(T(F), T(F))$ donnée par

$$\pi(l_{i1}^{j1} \otimes \ldots \otimes l_{in}^{jn}) = X(l_{i1}^{j1}) \circ \ldots \circ X(l_{in}^{jn})$$

est une action de $T(L)$ sur $T(F)$ et en particulier une représentation dont l'idéal associé $I_x \subset T(L)$ caractérise les relations dans U_x .

On montre parceque d'une part L est une cogèbre cotrigonale et donc de type fini, et d'autre part , F est une cogèbre fortement régulière, que l'idéal I_x est engendré par une réunion dénombrable d'espaces vectoriels de dimensions finies qui sont chacun des coidéaux de $T(L)(\Delta_L, \epsilon_L)$.

La condition nécessaire et suffisante pour avoir une antipode sur $U_x(\Delta_L, \epsilon_L)$ est que les relations soient compatibles avec l'anti-homomorphisme a priori défini sur les générateurs; ceci finit la démonstration du théorème 3.1 .

Mais en fait on va démontrer des propriétés plus fortes dans la bigèbre $U_x(\Delta_L, \epsilon_L)$ qui conduisent au théorème 3.2 .

Si l'on choisit une détermination particulière de l'inverse de l'opérateur diagonal $X_i^i, (i,i) \in D_L$ on obtient alors une application $S_1^r : L \to T(L)$ qui vérifie :

$$\pi(S_1^r(l_i^j) = Y_i^j$$

où π est le morphisme d'algèbres, de $T(L)$ dans U_x , défini par :

$$\pi(l_{i1}^{j1} \otimes \ldots \otimes l_{in}^{jn}) = X(l_{i1}^{j1}) \circ \ldots \circ X(l_{in}^{jn}) \ .$$

Soit S^r l'application linéaire de $T(L)$ dans $T(L)$ obtenue en prolongeant S_1^r par anti-homomorphisme .

D'autre part on montre que les Y_i^j sont uniquement déterminés comme solution du problème précédent et qu'ils satisfont:

$$\Delta_L Y_i^j = \sum_{k \in (j,i)} Y_i^k \otimes Y_k^j;$$

on montre de plus que dans l'espace vectoriel des monômes d'ordre n

$w = l_{i1}^{j1} \otimes \ldots \otimes l_{in}^{jn} \in \otimes^n(L)$:

la solution du problème :

$$\sum_{k1,..kn} X(l_{k1}^{j1}) \circ \ldots \circ X(l_{kn}^{jn}) \circ Y_{i1,..,in}^{k1,..,kn} = \epsilon(X(l_{i1}^{j1}) \circ \ldots \circ X(l_{in}^{jn})).1_{U_x}$$

est unique dans la bigèbre U_x et est donnée par:

$$Y_{i1,..,in}^{k1,..,kn} = Y_{in}^{kn} \circ .. \circ Y_{i1}^{k1} = \pi(S^r(l_{i1}^{k1} \otimes \ldots \otimes l_{in}^{kn}) \ .$$

Théorème 3.2 *Soit F une cogèbre fortement régulière, L une cogèbre co-trigonale ; soit $x : L \to Inv_{d,r}(F,F)$ une application linéaire de L dans $Inv_{d,r}(F,F)$ qui vérifie:*

a)pour tout $l \in D_L$, $x(l)$ est un opérateur inversible dans $Inv_{d,r}(F,F)$

b) pour tout $l \in D_L$ il existe $l' \in D_L$ tel que

$$x(l) \circ x(l') = id : F \to F.$$

Alors :

Soit $T(L)(\Delta_L, \epsilon_L)$ la bigèbre universelle et soit I_x l'idéal associé par le morphisme d'algèbres $\pi : T(L) \to U_x$ défini par :

$$\pi : l_{i1}^{j1} \otimes l_{i2}^{j2} \otimes \ldots \otimes l_{in}^{jn} \to X(l_{i1}^{j1}) \circ X(l_{i2}^{j2}) \circ \ldots \circ X(l_{in}^{jn})$$

Soit S^r de $T(L) \to T(L)$ l'application linéaire précédemment définie .

Alors :

A) l'idéal I_x est un coidéal;

B) il existe un idéal minimal J_x de la bigèbre libre $T(L)(\Delta_L, \epsilon_L)$ vérifiant :

1) $I_x \subset J_x$

2) J_x est laissé invariant par S^r

3) J_x est un coidéal de la bigèbre $T(L)(\Delta_L, \epsilon_L)$.

C) $H_x = T(L)(\Delta_L, \epsilon_L)/J_x$ est l' algèbre de Hopf, canoniquement associée à la bigèbre $U_x(\Delta_L, \epsilon_L)$.

Démonstration:
On admettra dans cette note que l'idéal I_x est aussi un coidéal :

$$\Delta_L I_x \subset I_x \otimes T(L) + T(L) \otimes I_x.$$

Dans le théorème 3.1 on a précisé les hypothèses qui permettent de le déduire: L est une cogèbre de type fini , F est une cogèbre fortement régulière, et x une application linéaire de L dans les opérateurs invariants à droite réguliers sur F .

D'autre part montrons que pour tout monôme $l_{i1}^{j1} \otimes \ldots \otimes l_{in}^{jn}$ l'on a :

$$\Delta_L \circ S^r(l_{i1}^{j1} \otimes \ldots \otimes l_{in}^{jn}) \in I_x \otimes T(L) + T(L) \otimes I_x + S^r \otimes S^r \circ \Delta_L^{op}(l_{i1}^{j1} \otimes \ldots \otimes l_{in}^{jn}) \ .$$

En effet:

$$\pi \circ S^r(l_{i1}^{j1} \otimes \ldots \otimes l_{in}^{jn}) = Y_{in}^{jn} \circ .. \circ Y_{i1}^{j1}$$

$$\Delta_L(Y_{in}^{jn} \circ .. \circ Y_{i1}^{j1}) = \sum_{k1,..,kn} Y_{in}^{kn} \circ .. \circ Y_{i1}^{k1} \otimes Y_{kn}^{jn} \circ .. \circ Y_{k1}^{j1} \ ;$$

ce qui est égal dans $U_x \otimes U_x$ à :

$$(\pi \otimes \pi) \circ (S^r \otimes S^r) \Delta_L^{op}(l_{i1}^{j1} \otimes .. \otimes l_{in}^{jn}) \ ;$$

donc pour tout élément $w \in T(L)$ nous avons :

$$\Delta_L(S^r(w)) = S^r \otimes S^r \circ \Delta_L^{op}(w) \quad modulo \quad I_x \otimes T(L) + T(L) \otimes I_x \ .$$

Soit R un sous-espace vectoriel de $T(L)$ qui vérifie:

$$\Delta_L R \subset R \otimes T(L) + T(L) \otimes R.$$

Alors,

$$\Delta_L S^r(R) \subset S^r(R) \otimes T(L) + T(L) \otimes S^r(R) + I_x \otimes T(L) + T(L) \otimes I_x \ .$$

Soit R_0 un sous espace vectoriel de relations qui détermine I_x (l'idéal bilatère engendré par R_0 et l'idéal I_x coïncident), et qui soit un coidéal de la bigèbre $T(L)(\Delta_L, \epsilon_L)$;

Soit $R_n = \sum_{i \in (0,n)} (S^r)^{(i)}(R_0)$: par récurrence on montre que R_n vérifie :

$$\Delta_L S^r(R_n) \subset I(R_{n+1}) \otimes T(L) + T(L) \otimes I(R_{n+1})$$

et donc:

$$\Delta_L(R_{n+1}) \subset I(R_{n+1}) \otimes T(L) + T(L) \otimes I(R_{n+1})$$

où $I(R_n)$désigne l'idéal bilatère engendré par R_n .

$\cup_{n \in N} R_n$ est donc le plus petit sous espace vectoriel de $T(L)$ stable par S^r , contenant R_0 ; et l'idéal engendré est bien un coidéal de la bigèbre : $T(L)(\Delta_L, \epsilon_L)$.

L'algèbre $H_x = T(L)(\Delta_L, \epsilon_L)/J_x$ est une algèbre de Hopf canoniquement associée à la bigèbre U_x du théorème 3.2 .

4 Critère pour qu'une bigèbre réalisée admette une algèbre de Hopf associée .

Le théorème suivant, plus abstrait, est énoncé en partie pour éviter toutes confusions dans les étapes du théorème 3.2 d'une part , et d'autre part pour donner une condition abstraite qui permet de s'affranchir de la condition imposée dans les théorèmes 3.1 et 3.2 sur la cogèbre L d'être cotrigonale .

Théorème 4.1 *Soit L et F deux cogèbres vérifiant :*
a) L est une cogèbre de type fini.
b) F est une cogèbre fortement régulière.

Soit $x : L \to Inv_{d,r}(F, F)$ une application linéaire de la cogèbre L dans les opérateurs invariants à droite réguliers sur la cogèbre F .

Soit $U_x(\Delta_L, \epsilon_L)$ la bigèbre donnée par le théorème 2.2, engendrée par l'identité de $T(F)$ dans $T(F)$ et les opérateurs $X(l)$:

$$X(l) \in Inv_d(T(F), T(F) \subset Hom(T(F), T(F))$$

Hypothèse:
Supposons qu'il existe une solution dans $U_x(\Delta_L, \epsilon_L)$ au système d'équations:

$$\sum_k X(l_k^{'}) \circ Y(l_k^{''}) = \epsilon_L(l) 1_{U_x}$$

$$\sum_k Y(l_k^{'}) \circ X(l_k^{''}) = \epsilon_L(l) 1_{U_x}$$

où

$$\Delta_L(l) = \sum_k l_k^{'} \otimes l_k^{''}$$

Alors la solution (dans U_x) est unique et vérifie

$$\Delta_L(Y(l)) = \sum_k Y(l_k^{''}) \otimes Y(l_k^{'})$$

Soit $T(L)(\Delta_L, \epsilon_L)$ la bigèbre universelle et soit I_x l'idéal associé par le morphisme d'algèbres :

$$\pi : l_{i1}^{j1} \otimes l_{i2}^{j2} \otimes \ldots \otimes l_{in}^{jn} \to X(l_{i1}^{j1}) \circ X(l_{i2}^{j2}) \circ \ldots \circ X(l_{in}^{jn})$$

Soit S_1 *de* $L \rightarrow T(L)$ *une application linéaire vérifiant:*

$\pi \circ S_1(l) = Y(l)$ *, et soit :*

$S^r : T(L) \rightarrow T(L)$ *l'extension de* S_1 *par anti-homomorphisme ;*
Alors :

A) *l'idéal* I_x *est un coidéal de* $T(L)(\Delta_L, \epsilon_L)$ *.*

B) *Il existe un idéal minimal :* J_x *, de la bigèbre libre* $T(L)(\Delta_L, \epsilon_L)$ *, qui vérifie:*

1) $I_x \subset J_x$ *,*

2) J_x *est laissé invariant par* S^r *,*

3) J_x *est un coidéal de la bigèbre* $T(L)(\Delta_L, \epsilon_L)$ *.*

C) $H_x = T(L)(\Delta_L, \epsilon_L)/J_x$ *est l' algèbre de Hopf, canoniquement associée à la bigèbre* $U_x(\Delta_L, \epsilon_L)$ *.*

La démonstration est essentiellement celle du théorème 3.2 . L'intérêt des théorèmes 3.1 et 3.2 est précisemment de donner des conditions qui permettent de montrer la validité de l'hypothèse faite dans le théorème 4.1 .

References

[1] Abe, Eiichi: *Hopf Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980

[2] Majid, Shahn: *Foundations of quantum group theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995

[3] Mourre, Eric: *Remarques sur la relation d'extension et applications à l'étude de la notion de bigèbres*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.318, Série I, p. 209-212, 1994

[4] V.G, Drinfeld: *Quantum groups*, Proc. Int. Conf. math., Berkeley, California, 1986.